Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Noviembre – 2023

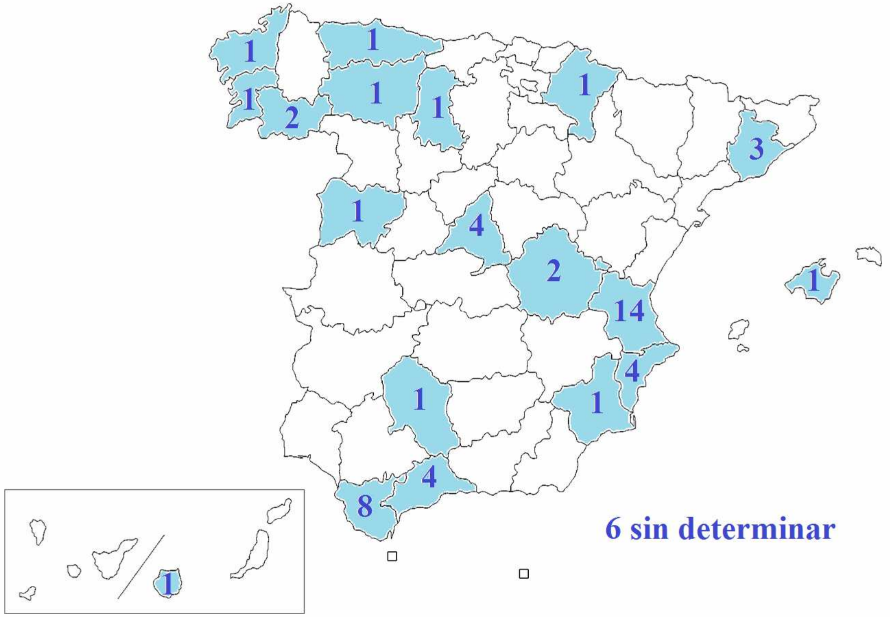
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
037	✓	✓	✓	✓	✓	✓
038	✓	✓	✓	✓	✓	✓
039	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

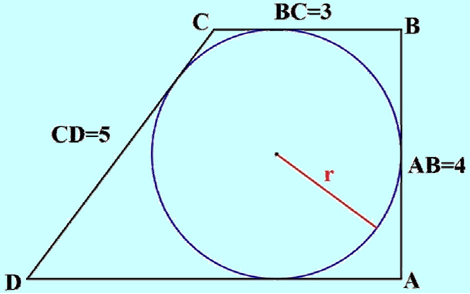
58 participantes (47 chicos / 11 chicas) 109 respuestas



Alevín (5º/6º Primaria)

A-039. Te aprecio trapecio.

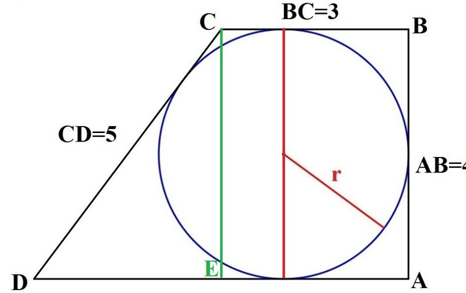
Determina, no te debe costar mucho, el valor del radio de la circunferencia inscrita en el trapecio **ABCD** de la figura y, también, la longitud del lado **AD** que falta.



Solución

Basta apreciar que el diámetro vertical de la circunferencia tiene la misma longitud que el lado **AB** del trapecio. Por tanto, el radio mide la mitad: $\underline{r = 2}$

Si llamamos **E** al pie de la línea perpendicular a la base **AD** trazada desde el vértice **E**, obtenemos el **triángulo CDE** rectángulo en **E** con cateto mayor **4** y diagonal **5** que, como bien sabes, es **pitagórico** con cateto menor $ED = 3$. Por tanto, el lado que falta, la base mayor del trapecio, mide: $\underline{AD} = AE + ED = BC + ED = 3 + 3 = \underline{6}$



Nota.- Aunque no se te pide, ya puedes calcular fácilmente el área del trapecio:

*Marcando la diagonal del rectángulo **ABCE** se ve que es tres veces la del famoso triángulo pitagórico 3:4:5, el CDE, esto es, 3·(3·4/2)=3·6=18 uds.*

Valor que, como bien puedes constatar, coincide con el que se obtiene aplicando la fórmula que te mostraron en clase: S= (B+b)·h/2=(6+3)·4/2=18 uds.

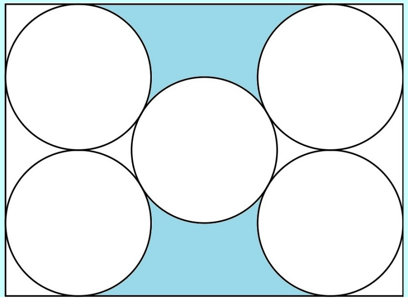
*Además de la del proponente, se han recibido soluciones correctas de: **Bruno Martínez Vañó** (IES Cabañal. Valencia), **Jesús Mª Gutiérrez Gutiérrez** (Palencia), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Adrián Burgos Valle** (IES Oleana), **Samuel Dussart Pedrón** (IES Uno. Requena), **Teo Solá Vázquez** (Montessori School), **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Antonio de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Víctor de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Iván López Márquez** (C. Inmaculada. Alicante), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Aitor Espada García** (IESO Eva Escribano. Minglanilla), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Mario Blanes Garrido** (Colegio Dominicas. Paterna) y **Juan José Asensio García** (IES Riu Turia. Quart de Poblet).*

Se recibió una solución incompleta que luego se rectificó.

Infantil (1º/2º ESO)

I-039. Blanco y azul.

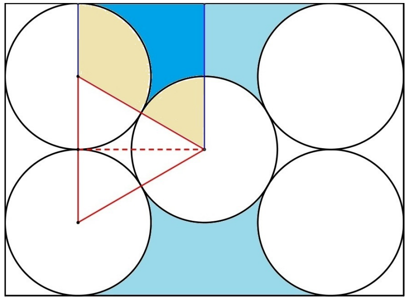
Sabiendo que todos los círculos de la figura son de radio una unidad de longitud, determina el valor del área de la región sombreada.



Solución

Uniendo los centros de tres círculos tangentes dos a dos de la parte izquierda de la figura obtenemos un triángulo equilátero de lado **2** u.d.l. y, como bien vemos, su mitad es un cartabón estándar de lados $1:\sqrt{3}:2$

Y además, trazando desde esos centros dos segmentos perpendiculares al lado superior del rectángulo, un trapecio cuya área excede en medio círculo (1/3+1/6) a la cuarta parte del área demandada, un trapecio cuyos lados y ángulos quedan perfectamente determinados:



$1:2:2:\sqrt{3}$ y $90^\circ:120^\circ:60^\circ:90^\circ$

Así, con todo, el área pedida es: $4\cdot\left(\frac{(1+2)\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\underline{6\sqrt{3}-2\pi}$ u.d.s.

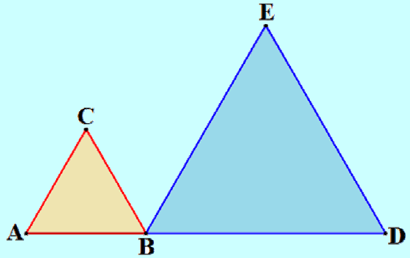
*Además de la del proponente, se han recibido soluciones correctas de: **Jesús Mª Gutiérrez Gutiérrez** (Palencia), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor Torre Pacheco), **José Luis Marín Albea** (EPM-MG. Torrelodones), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Ourense), **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Antonio de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Víctor de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **Pablo Freire Fernández** (IES As Lagoas. Orense), **Daniel Hjort de Ayala** (IES Playa de San Juan), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Iván López Márquez** (Colegio Inmaculada. Alicante), **Eva Sánchez González** (IES Benalmádena. Arroyo de la miel), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina) y **Juan José Asensio García** (E3-IES Riu Turia. Quart de Poblet).*

Se recibió también una solución incorrecta.

Cadete (3º/4º ESO)

C-039. Tres triángulos equiláteros.

Tenemos, como se muestra en la figura, dos triángulos equiláteros **ABC** y **BDE** de áreas **4** y **16 m²** respectivamente. Sobre el segmento **CE** construimos el triángulo equilátero **CEF**. Calcula el valor del área del triángulo **ADF**.



Solución

El área de un triángulo equilátero es:

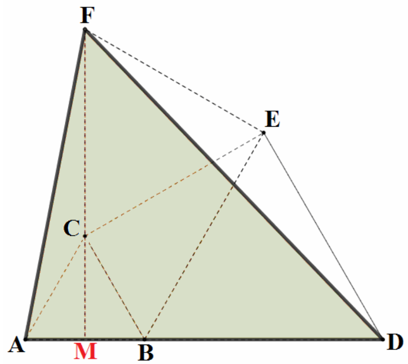
$$A_\Delta=\ell^2\sqrt{3}/4 \quad\leftrightarrow\quad \ell=2\sqrt{A/\sqrt{3}}$$

En nuestro caso:

$$\ell_1=AB=2\sqrt{4/\sqrt{3}}=4/\sqrt[4]{3} \text{ y}$$
$$\ell_2=BD=2\sqrt{16/\sqrt{3}}=8/\sqrt[4]{3}$$

Y, así, como $\ell_2=2\ell_1$ y $\hat{CBE}=60^\circ$ el triángulo **BCE** es un cartabón. Luego:

$$\ell_3=CE=\ell_1\cdot\sqrt{3}=4\cdot\sqrt[4]{3}$$



Lo mismo pasa con **CMB**, que también es un cartabón. Así la altura del triángulo **CMB** será: $CM=\ell_1/2\cdot\sqrt{3}=2\cdot\sqrt[4]{3}$

Y, finalmente, como los segmentos **FC** y **CM** están alineados y son perpendiculares a **AD** podemos calcular ya el área del triángulo **ADF**:

$$\underline{[ADF]}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot FM=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{4}{\sqrt[4]{3}}+\frac{8}{\sqrt[4]{3}}\right)\cdot\left(4\cdot\sqrt[4]{3}+2\cdot\sqrt[4]{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{\sqrt[4]{3}}\cdot 6\cdot\sqrt[4]{3}=\underline{36\ m^2}$$

*Además de la del proponente, se han recibido soluciones correctas de: **David Arso Civil** (IES Miquel Tarradell. Barcelona), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **José Luis Marín Albea** (EPM-MG. Torrelodones), **Berta Lorenzo Berenguer** (IES Luis Vives. Valencia), **Margarita Ragel Castilla** (El Centro Inglés. Puerto de Santa María), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Ourense), **Pablo Freire Fernández** (IES As Lagoas. Orense), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Ricardo Martínez Obiler** (IES Playa San Juan. Alicante), **Iván López Márquez** (Colegio Inmaculada. Alicante), **Eva Sánchez González** (IES Benalmádena. Arroyo de la miel), **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **David Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia) y **Juan José Asensio García** (IES Riu Turia. Quart de Poblet).*

Se recibieron también cuatro soluciones incompletas, mal o no justificadas y cinco incorrectas.

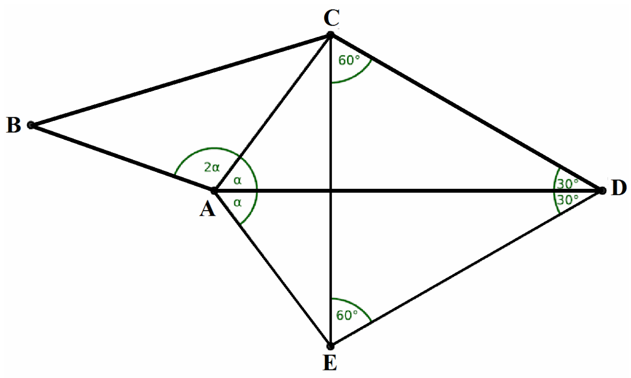
Jv-039. Cuadrilátero convexo.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo con ángulos $\angle CDA = 30^\circ$ y $\angle CAB = 2\angle CAD$ y lado $AB = AC$. Prueba que $BC = CD$.

Solución

Si $\alpha = \angle DAC$, entonces:

$$\angle CAB = 2\angle CAD = 2\alpha$$



Si E es el punto simétrico de C con respecto a la recta AD, entonces CDE resulta ser un triángulo equilátero.

Así, como $AE = AC = AB$ y $\angle CAE = \angle CAB = 2\alpha$, resulta que B y E son puntos simétricos respecto de la recta AC.

Y, finalmente, como $BC = CE$ y $CE = CD$, se concluye que $\underline{BC = CD}$.

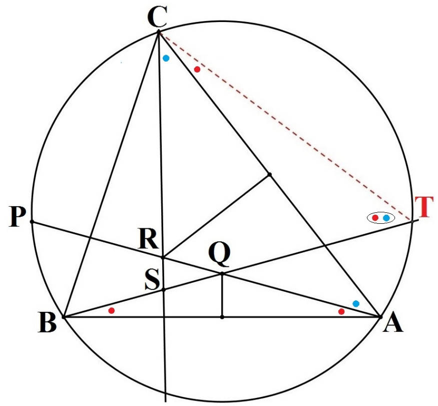
Bien resuelto por: ***Paco Esteve*** *(IES Inca. Palma de Mallorca),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Chan do Monte. Marín),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Henry Díaz Bordón*** *(IES Vecindario. Las Palmas),* ***Hugo Serrano Macías*** *(El Centro Inglés. Puerto de Santa María),* ***Javier Monfort Llorente, Roger Fernández Lopera*** *(Tordera),* ***José Luis Marín Albea*** *(EPM-MG. Torrelodones),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(Ourense),* ***Pablo Freire Fernández*** *(IES As Lagoas. Orense),* ***Celso de Frutos de Nicolás*** *(Coslada), un participante sin identificar,* ***Alberto López Barrera*** *(Centro Inglés. Puerto de Santa María) y* ***Antonio García Mulero*** *(B1-Centro Inglés. Pto Sta María).*

Se recibieron también una respuesta incompleta y cinco incorrectas.

Jn-039. Buscando a pe.

Sea A el ángulo menor del triángulo ABC y sea P un punto de su circunferencia circunscrita en el arco que une B y C y no contiene a A. Las mediatrices de los lados AB y AC cortan la línea AP en Q y en R respectivamente. Y, finalmente, las líneas BQ y CR se cortan en S. Probar que $AP = SB + SC$.

Solución



Representamos la situación con detalle y, como se ve en el gráfico, hemos llamado T al punto de intersección de la línea BQ con la circunferencia y hemos trazado el segmento CT.

Mirando con detenimiento:

- Por ser Q un punto de la mediatriz del lado AB, $AP = BT$ y $\angle ABQ = \angle BAQ$ *(en rojo)*
- Por ser R un punto de la mediatriz del lado AC, $\angle ACR = \angle CAR$ *(en azul)*
- $\angle ABT = \angle ACT$ por ser ambos inscritos a la circunferencia abarcando el mismo arco
- Y, por la misma razón, $\angle BAC = \angle BTC$ *(rojo más azul)*

Así, el triángulo SCT es isósceles y, por tanto, $SC = ST$

Cuesta más escribirlo que verlo en el dibujo:

$$\angle BAC = \angle BAQ + \angle CAR = \angle ABT + \angle ACR = \angle ACT + \angle ACR = \angle TCR \equiv \angle TCS$$

$$\angle BTC \equiv \angle STC$$

Luego: $\angle TCS \equiv \angle STC$, esto es, $SC = ST$

Con todo: $\underline{AP} = BT = BS + ST = \underline{BS + SC}$ c.q.d.

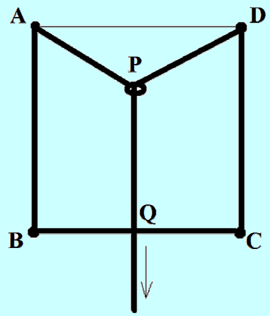
Bien resuelto por: ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Chan do Monte. Marín),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***José Antonio Rama López*** *(Santiago de Compostela),* ***Pablo Freire Fernández*** *(IES As Lagoas. Orense) y* ***Fernando Martín Gil*** *(León).*

S-039. Nudo corredizo.

Una cuerda, que en uno de sus extremos tiene un nudo corredizo, se coloca alrededor de cuatro postes que forman un cuadrado de lado **2** metros de la forma que indica la ilustración y se tensa al máximo.

El extremo del nudo corredizo es **P** y la cuerda recorre los puntos **P, A, B, C, D, P, Q**.

Determina la longitud de la cuerda utilizada desde **P** hasta **Q**.

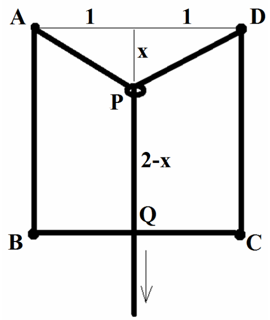


Solución:

Llamando **x** a la distancia de **P** a **AD** y teniendo en cuenta la simetría, vemos que la longitud de la cuerda viene dada por la función:

$$L(x) = 6 + 2\sqrt{x^2+1} + 2 - x =$$
$$= 8 + 2\sqrt{x^2+1} - x$$

claramente definida en el intervalo cerrado $[0,2]$ y continua en él.



Y, como la queremos extender al máximo, hemos de ver donde es mínima, cuestión que podemos abordar estudiando su crecimiento, esto es, el signo de su derivada:

$$L'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 :: 0 \quad \rightarrow \quad 2x :: \sqrt{x^2+1} \quad \rightarrow$$

$$4x^2 :: x^2+1 \quad \rightarrow \quad 3x^2 :: 1 \quad \rightarrow \quad x^2 :: \frac{1}{3}$$

Luego:

x	0	$\left]0,+\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$	$+\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\left]+\frac{\sqrt{3}}{3},2\right[$	2
$L'(x)$	−	−	0	+	+
$L(x)$	10	↘	$8+\sqrt{3} \approx 9'73$	↗	$6+2\sqrt{5} \approx 10'47$

Por tanto, la longitud mínima que alcanzará la cuerda será de $\underline{8+\sqrt{3} \approx 9'73 \text{ m}}$

Bien resuelto por: F. Damián Aranda Ballesteros *(IPEP-Córdoba)*, Sergio Sánchez Zufía *(Navarra)*, Alicia Seijas ***Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín)*, ***Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco)*, ***José Antonio Rama López** (Santiago de Compostela)*, ***José Antonio Coque Díez, Alejandro Camblor Fernández** (IES RP. Cangas de Onís) y **Francisco Merchán Cid** (IES La Vaguada de la Palma)*

Se recibieron también seis respuestas incorrectas.