

I-041. Emepé de un número.

Llamamos **MP** de un número natural **n**, y lo representamos así **MP(n)**, al mayor número primo por el que se puede dividir **n**. Por ejemplo:

$$\text{MP}(14) = 7 \quad \text{y} \quad \text{MP}(41) = 41$$

¿Cuánto suman los números de cuatro cifras que, como **2024**, se pueden escribir con dos doses, un cero y un cuatro, y tienen un **MP** de tres cifras?

Solución

Basta descomponer en factores primos todos los números de cuatro cifras que se pueden escribir con dos doses, un cero y un cuatro, y ver su correspondiente **MP**:

- Seis empezando por 2: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23 \rightarrow \text{MP}(2024) = 23$
- $2042 = 2 \cdot 1021 \rightarrow \text{MP}(2042) = 1021$
- $2204 = 2^2 \cdot 19 \cdot 29 \rightarrow \text{MP}(2204) = 29$
- $2240 = 2^6 \cdot 5 \cdot 7 \rightarrow \text{MP}(2240) = 7$
- $2402 = 2 \cdot 1201 \rightarrow \text{MP}(2402) = 1201$
- $2420 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11^2 \rightarrow \text{MP}(2420) = 11$
- Ninguno empezando por 0, pues no serían de cuatro cifras.
- Tres empezando por 4: $4022 = 2 \cdot 2011 \rightarrow \text{MP}(4022) = 2011$
- $4202 = 2 \cdot 11 \cdot 191 \rightarrow \text{MP}(4202) = 191$
- $4220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 211 \rightarrow \text{MP}(4220) = 211$

Son únicamente estos dos últimos, los subrayados, los que tienen un **MP** de tres cifras. Por tanto su suma es: $4202 + 4220 = \underline{8422}$

Bien resuelto por: **Eva Sánchez Gonzalez** (IES Benalmádena. Arroyo de la miel), **Bruno Martínez Vañó** (IES Cabañal. Valencia), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **Aitana Navarro Roger** (IES Playa de San Juan), **Adrián Burgos Valle** (IES Oleana), **Ana Lozano Miguel** (IES Uno. Requena), **Antonio de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Francisco Burgos Valle** (IES Oleana), **Hugo Hernández Climent** (IES Oleana), **Víctor de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Anabel Robles López** (IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **David Sánchez Cuenca** (E2-IES Serranía. Alosaina), **Alberto Rodrigo García** (IES Torre de los Espejos. Utebo), **Raúl Ángel Bazgau** (IES Torre de los Espejos. Utebo), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas) y **Ana María Nave Fullana** (IES Luis Vives. Valencia)

Se recibió también una solución incorrecta.

C-041. Sí o no.

Prueba si $10^{2024} - 2023$ es, o no, cuadrado perfecto.

Solución

$10^{2024} - 2023 = 100\dots00000 - 2023 = 99\dots997977$ que es un enorme número de **2020** cifras: empieza con **2020** nuevos seguidos y termina en **7977**.

Así, la suma de sus cifras es $2020 \cdot 9 + (7 + 9 + 7 + 7) = 2020 \cdot 9 + 30$, esto es, una suma divisible por **3** pero no por **9**. Por tanto, claramente, nuestro enorme número no puede ser un cuadrado perfecto.

Bien resuelto por: **Isaac Dawson Marco** (IES Enric Soler i Godes. Benifaió), **Eva Sánchez Gonzalez** (IES Benalmádena. Arroyo de la miel), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **José Rafael Capellán Fernández**, **Adrián Burgos Valle** (IES Oleana), **Ana Lozano Miguel** (IES Uno. Requena), **Antonio de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Francisco Burgos Valle** (IES Oleana), **Hugo Hernández Climent** (IES Oleana), **Víctor de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Ana Sánchez Espinosa** (IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada), **Marina Sánchez Caballero** (IES Castuera), **Violeta Murillo Morillo** (IES Castuera), **J Carlos L** (politécnica), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Marcos Alberto Herrera Ramos** (HEM⁴ Aux. Salesianas. Tenerife), **Iván López Márquez** (C. Inmaculada. Alicante), **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alosaina), **Juan José Asensio García** (IES Riu Turia. Quart de Poblet), **Laura Reinaldos Santana**, **Alberto Rodrigo García** (IES Torre de los Espejos. Utebo), **Raúl Ángel Bazgau** (IES Torre de los Espejos. Utebo), **Javier Suárez Godoy** (IES Mesa y López. Las Palmas), **Víctor Moreno Gómez** (IES E. Tierno Galván. Parla) y **Sofía Burguera Fernández** (E3-Sta Teresa de Jesús. El Vedat. Torrente)

Se recibieron también una solución incompleta y dos incorrectas.

Jv-041. Sí o no bis.

Prueba si $46^{41} + 36^{41}$ es, o no, múltiplo de 41.

Solución

Por la potencia del binomio se sabe que:

$$(a + b)^n = \overset{\cdot}{a} + b^n \text{ y } (a - b)^n = \begin{cases} \overset{\cdot}{a} + b^n & \text{si } n = 2k \\ \overset{\cdot}{a} - b^n & \text{si } n = 2k + 1 \end{cases}$$

Así, en nuestro caso:

$$46^{41} + 36^{41} = (41 + 5)^{41} + (41 - 5)^{41} = \left(\overset{\cdot}{41} + 5^{41} \right) + \left(\overset{\cdot}{41} - 5^{41} \right) = \overset{\cdot}{41}$$

Luego $46^{41} + 36^{41}$ sí que es múltiplo de 41

Bien resuelto por: **Francisco Esteve Barceló** (IES Inca. Palma de Mallorca), **Eva Sánchez Gonzalez** (IES Benalmádena. Arroyo de la miel), **Rodrigo Martínez** (El Centro Inglés. Puerto de Santa María), **Roger Fernández Lopera** (Tordera), **Henry Díaz Bordón** (IES Vecindario. Las Palmas), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **María Riscos Gallego** (IES Luca de Tena. Sevilla), **José Rafael Capellán Fernández**, **Oier Aizpurua**, **J Carlos L** (politecnómica), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Juan Manuel Sánchez Hernández** (IESO Las Batuecas. La Alberca), **José Ángel González Díez** (Carrión de los Condes), **Darío Hamad** (IES Luis Vives. Valencia), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **Juan José Asensio García** (IES Riu Turia. Quart de Poblet), **Eva Ros Torres** (IES Adolfo Suarez. Paracuellos del Jarama), **Iván Aldehuela Jaime** (Col. Nº Señora de las Nieves. Madrid), **Alejandro Pallarés Valiente** (Col. Nº Sseñora de las Nieves. Madrid), **Alberto Rodrigo García** (IES Torre de los Espejos. Utebo), **Raúl Ángel Bazgau** (IES Torre de los Espejos. Utebo), **Adrián Medina Ceballos-Zuñiga** (IES Arroyo Hondo. Rota), **Hugo López Ojeda** (Col. Nº Señora de las Nieves. Madrid) y **Marco Becerra Sulín** (IES Mediterráneo. Málaga)

Se recibieron también dos soluciones incompletas y tres incorrectas.

Jn-041. Sí o no tris: Nueva operación.

Para cada número entero positivo n dado, definimos la operación $\overline{\overline{n}}$ como el producto de todos los enteros positivos menores o iguales que n y con igual paridad que n . Por ejemplo: $\overline{\overline{5}} = 5 \cdot 3 \cdot 1 = 15$ o $\overline{\overline{6}} = 6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$.

Justifica debidamente si $\overline{\overline{2024}} - \overline{\overline{2023}}$ es, o no, múltiplo de 2025

Solución-1

La diferencia $\overline{\overline{2024}} - \overline{\overline{2023}}$ sí es múltiplo de $2025 = 81 \cdot 25$, pues tanto el minuendo como el sustraendo lo son como vemos, por ejemplo, aquí:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{2024}} &= 2024 \cdot 2022 \cdot 2020 \cdot \dots \cdot 162 \cdot \dots \cdot 50 \cdot \dots \cdot 2 = \\ &= 2024 \cdot 2022 \cdot 2020 \cdot \dots \cdot (2 \cdot 81) \cdot \dots \cdot (2 \cdot 25) \cdot \dots \cdot 2 = \overset{\cdot}{2025} \\ \overline{\overline{2023}} &= 2023 \cdot 2021 \cdot 2019 \cdot \dots \cdot 81 \cdot \dots \cdot 25 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1 = \overset{\cdot}{2025} \end{aligned}$$

Solución-2

$$\begin{aligned} \overline{\overline{2024}} &= 2024 \cdot 2022 \cdot 2020 \cdot \dots \cdot 2 \equiv (-1)(-3)(-5)\dots(-2023) \pmod{2025} \\ \overline{\overline{2024}} &\equiv (-1)^{1012} \cdot \overline{\overline{2023}} \pmod{2025} \\ \overline{\overline{2024}} &\equiv \overline{\overline{2023}} \pmod{2025} \end{aligned}$$

Luego $\overline{\overline{2024}} - \overline{\overline{2023}}$ es, claramente, múltiplo de 2025

Bien resuelto por: **Francisco Esteve Barceló** (IES Inca. Palma de Mallorca), **Daniel Fernández Santiago** (IES Beatriz Galindo. Madrid), **Eva Sánchez Gonzalez** (IES Benalmádena. Arroyo de la miel), **Henry Díaz Bordón** (IES Vecindario. Las Palmas), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **David Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **J Carlos L** (politecnómica), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Juan Manuel Sánchez Hernández** (IESO Las Batuecas. La Alberca), **José Luis Velasco Álvarez** (SaCyL. Valladolid), **Alberto Rodrigo García** (IES Torre de los Espejos. Utebo), **Raúl Ángel Bazgau** (IES Torre de los Espejos. Utebo)

Se recibieron también dos soluciones incorrectas.

Sénior

S-041. Si ó no tetris.

Sin hacer uso de aplicación de cálculo alguna, determina si el resultado de esta sencilla operación $(2024 - 5000)^2 + (8000 + 1265)^2$ es, o no, un número primo.

Solución

Operemos cada sumando por separado:

$$\begin{aligned}(2024 - 5000)^2 &= (8 \cdot 253 - 5 \cdot 1000)^2 = \\ &= 8^2 \cdot 253^2 - 2 \cdot 8 \cdot 253 \cdot 5 \cdot 1000 + 5^2 \cdot 1000^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(8000 + 1265)^2 &= (8 \cdot 1000 + 5 \cdot 253)^2 = \\ &= 8^2 \cdot 1000^2 + 2 \cdot 8 \cdot 1000 \cdot 5 \cdot 253 + 5^2 \cdot 253^2\end{aligned}$$

Y sumando ambos resultados:

$$\begin{aligned}(2024 - 5000)^2 + (8000 + 1265)^2 &= 8^2 \cdot 253^2 + 5^2 \cdot 1000^2 + 8^2 \cdot 1000^2 + 5^2 \cdot 253^2 \\ &= 8^2 \cdot (253^2 + 1000^2) + 5^2 \cdot (253^2 + 1000^2) \\ &= (8^2 + 5^2) \cdot (253^2 + 1000^2)\end{aligned}$$

vemos claramente que el resultado de la operación no es primo, es un número compuesto.

Nota.- Es aplicación directa de una conocida igualdad de Diofanto:

$$(ad - bc)^2 + (ac + bd)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

Bien resuelto por: **Francisco Esteve Barceló** (IES Inca. Palma de Mallorca), **David Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **Eva Sánchez Gonzalez** (IES Benalmádena. Arroyo de la miel), **Miguel Ángel Ingelmo Benito** (IES José Saramago. Arganda del Rey), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **Antonio Roberto Martínez Fernández** (CEA Mar Menor. Torre Pacheco), **José Rafael Capellán Fernández**, **Jorge González Acosta**, **J Carlos L** (politécnica), **José Luis Velasco Álvarez** (SaCyl. Valladolid), **Francisco Merchán Cid** (IES La Vaguada de la Palma. Salamanca), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Juan Manuel Sánchez Hernández** (IESO Las Batuecas. La Alberca), **Aitor Espada García** (IESO Eva Escribano. Minglanilla), **Alberto Rodrigo García** (IES Torre de los Espejos. Utebo) y **Raúl Ángel Bazgau** (IES Torre de los Espejos. Utebo)