Real Sociedad
Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Febrero – 2024

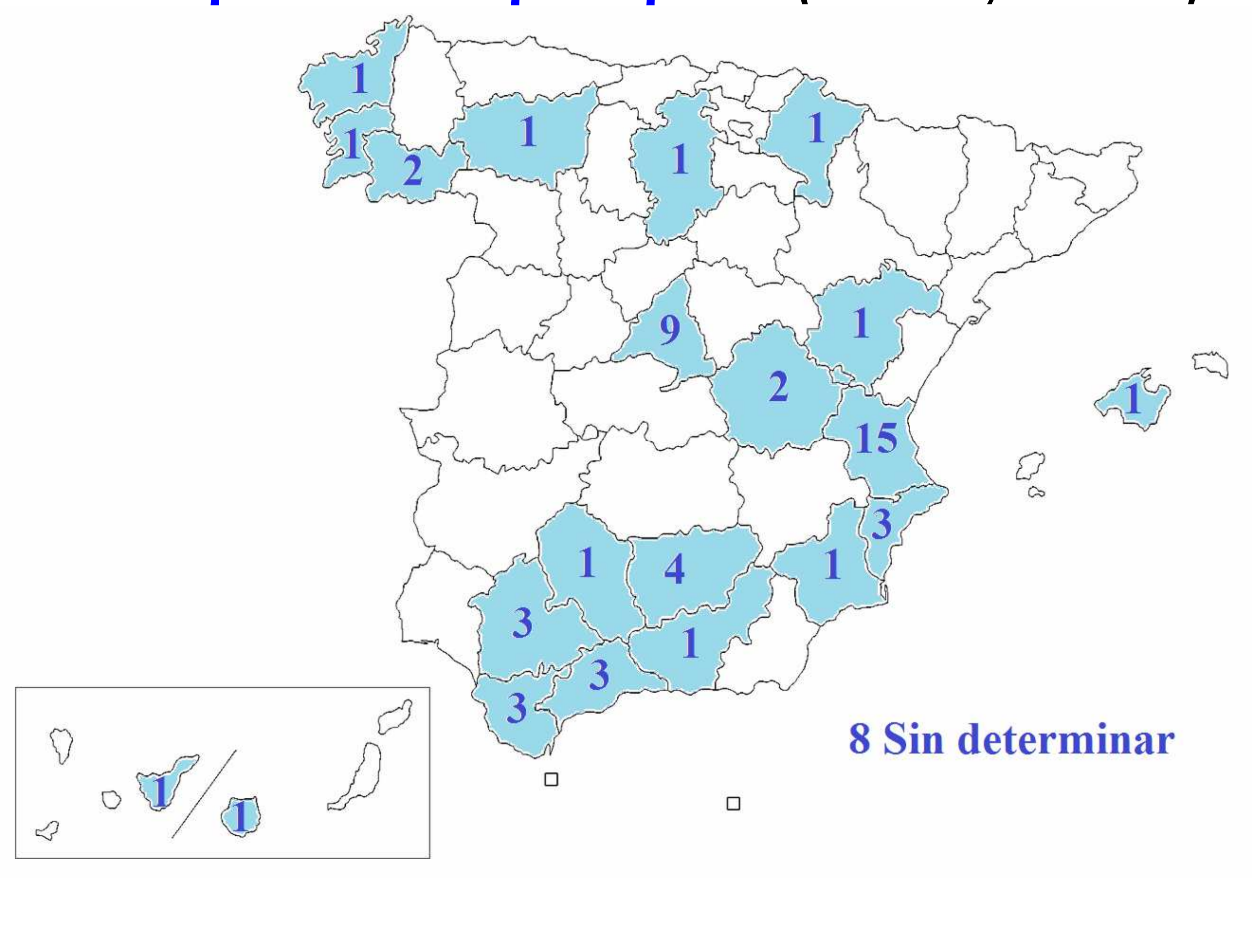
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

<table>
<tr><th></th><th>Alevín</th><th>Infantil</th><th>Cadete</th><th>Juvenil</th><th>Júnior</th><th>Sénior</th></tr>
<tr><td>040</td><td colspan="2">✓</td><td colspan="2">✓</td><td colspan="2">✓</td></tr>
<tr><td>041</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td></tr>
<tr><td>042</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td><td>✓</td></tr>
</table>

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

125 respuestas de 64 participantes (**45 chicos** / **19 chicas**)



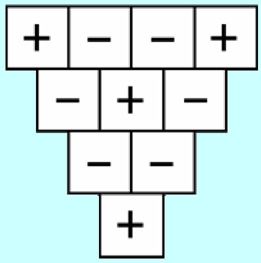
Alevín (5º/6º Primaria)

A-042. La regla de los signos.

Vamos a rellenar los cuadrados de este tablero con signos "**+**" y "**–**", empezando por la fila superior.

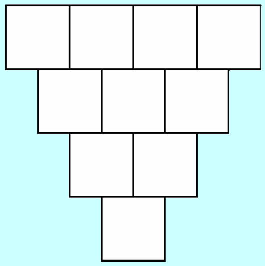
Bajo cada pareja de signos se escribe el resultado de su multiplicación respetando la *regla de los signos*.

Por ejemplo, he aquí uno a la derecha:



¿Qué cuatro signos hay que colocar en la primera fila del tablero para que una vez completo contenga tantos signos "**+**" como "**–**" El ejemplo anterior no valdría, pues contiene cuatro signos "**+**" y seis signos "**–**".

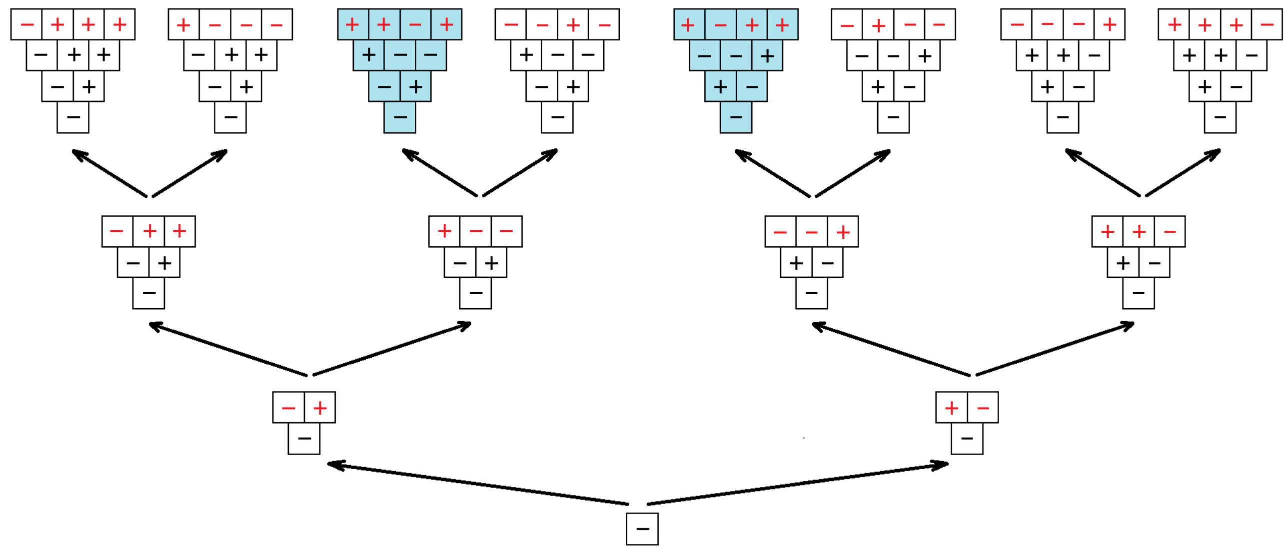
¿Cuántas soluciones diferentes hay?



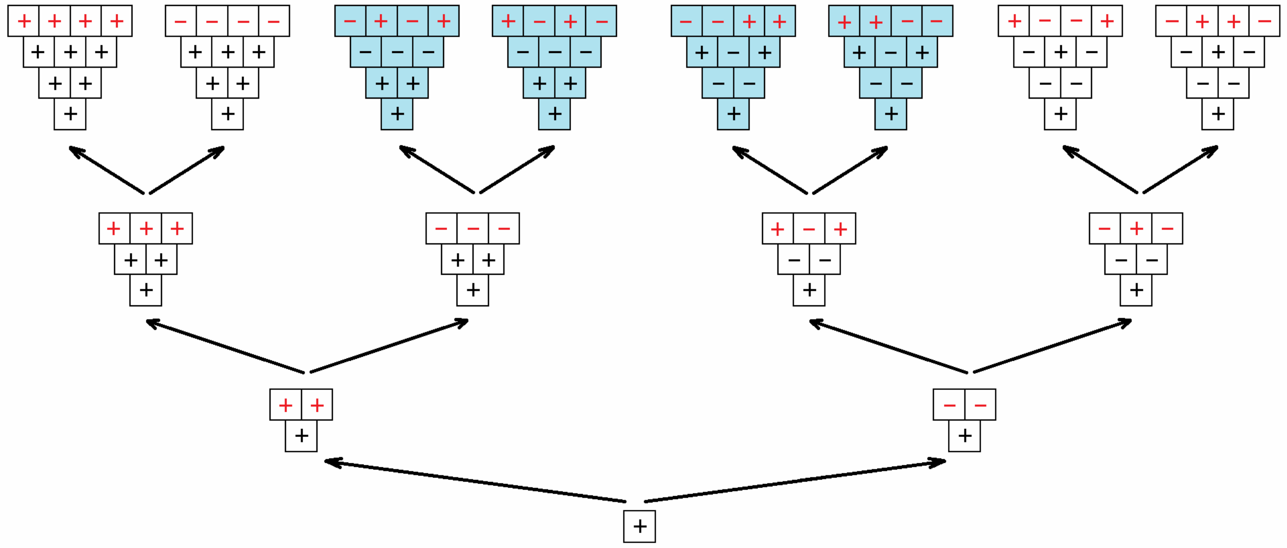
Solución

Empezando por el final, según sea "**+**" o "**–**", vamos a reconstruir todos los posibles tableros y sombrearemos los casos en los que hay cinco signos de cada tipo.

Tableros terminados en "**–**":



Tableros terminados en “**+**”:



Bien resuelto por: ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Adrián Burgos Valle*** *(IES Oleana. Requena),* ***Samuel Dussart Pedrón*** *(IES Uno. Requena),* ***Víctor de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Ana Lozano Miguel*** *(IES Uno. Requena),* ***Antonio de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Diego Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Francisco Burgos Valle*** *(IES Oleana. Requena),* ***Hugo Hernández Climent*** *(B1-IES Oleana. Requena),* ***Rubén Martínez Mendoza*** *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada),* ***Elisa*** *(CIMM. Málaga),* ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Chan do Monte. Marín),* ***David Sánchez Cuenca*** *(IES Serranía. Alozaina) y* ***Bruno Farnos*** *(CRA Matarraña. Calaceite)*

Se recibieron también ocho soluciones incompletas y una incorrecta.

I-042. Abe barra alta.

Designamos por $\overline{ab}$ al número de dos cifras con a decenas y b unidades. ¿Qué condición deben cumplir cuatro cifras a, b, c y d, distintas y no nulas, para que $\overline{ab}\times\overline{cd}=\overline{ba}\times\overline{dc}$, como por ejemplo: $21\times 36=12\times 63$?. Da todas las posibilidades

Solución

Pasando la expresión $\overline{ab}\times\overline{cd}=\overline{ba}\times\overline{dc}$ a unidades, nos queda:

$$(10a+b)(10c+d)=(10b+a)(10d+c)$$

$$100ac+10ad+10bc+bd=100bd+10bc+10ad+ac$$

$$99ac=99bd \quad\rightarrow\quad \underline{ac=bd}$$

Y, ahora, teniendo en cuenta que las cuatro cifras han de ser distintas y no nulas, y siendo extremadamente sistemático, las ponemos todas:

$ac=bd$	Posibilidades	
6	$12\times 63=21\times 36$	$13\times 62=31\times 62$
8	$12\times 84=21\times 48$	$14\times 82=41\times 28$
12	$23\times 64=32\times 46$	$24\times 63=42\times 36$
18	$23\times 96=32\times 69$	$32\times 69=23\times 96$
24	$34\times 86=43\times 68$	$43\times 68=34\times 86$

Diez posibilidades en total.

*Bien resuelto por: **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Adrián Burgos Valle** (IES Oleana. Requena), **Samuel Dussart Pedrón** (IES Uno. Requena), **Víctor de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Ana Lozano Miguel** (IES Uno. Requena), **Antonio de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Francisco Burgos Valle** (IES Oleana. Requena), **Hugo Hernández Climent** (IES Oleana. Requena), **Laura García Robles** (E1-IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada), **David Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia) y **Pablo Freire Fernández** (IES As Lagoas. Orense)*

Se recibieron también diez soluciones incompletas y tres incorrectas.

C-042. ABC rectángulo.

Con la notación habitual, demuestra que si las longitudes de los lados del triángulo ABC cumplen la relación $a^3+b^3+c^3=ab(a+b)-bc(b+c)+ca(c+a)$, entonces es rectángulo

Solución

Como: $a^3+b^3+c^3=ab(a+b)-bc(b+c)+ca(c+a)$, operando:

$$\begin{aligned}0&=a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)=\\&=a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2+b^2c+bc^2-c^2a-ca^2=\\&=a^2(a-b-c)+b^2(b-a+c)+c^2(c+b-a)=\\&=(b+c-a)(b^2+c^2-a^2)\end{aligned}$$

El primer factor no puede ser nulo, pues la desigualdad triangular nos asegura que $b+c>a$. Luego ha de serlo el segundo, $b^2+c^2-a^2=0$, y esto implica que $b^2+c^2=a^2$, esto es, que la terna (a,b,c) de números reales es pitagórica y, por tanto, que el triángulo ABC es rectángulo.

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***David Ortí Pascual*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Laura Reinaldos Santana, Julio J. Zárate Pinto*** *(IES La Bureba. Briviesca),* ***Ana Lozano Miguel*** *(IES Uno. Requena),* ***Antonio de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Diego Salón Hernández*** *(IES Uno. Requena),* ***Francisco Burgos Valle*** *(IES Oleana),* ***Hugo Hernández Climent*** *(IES Oleana. Requena),* ***Ana Sánchez Espinosa*** *(IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada),* ***María Riscos Gallego*** *(IES Luca de Tena. Sevilla),* ***Rubén Ortí Pascual*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Inés Moral Víllora*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Andrea Silvestre Bort*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Chan do Monte. Marín),* ***David Sánchez Cuenca*** *(IES Serranía. Alozaina),* ***Pablo Freire Fernández*** *(IES As Lagoas. Orense) y* ***Manel Vergel Cifre*** *(IES Santa Pola)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas.

Jv-042. Factor Ka.

Si $x^4+1=7\cdot x^2$ con $x>0$, ¿para qué valor de k se cumplirá que $x^6+1=k\cdot x^3$?

Solución

Como $x>0$, no nulo:

$$7=\frac{x^4+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}\quad\rightarrow\quad 9=x^2+2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\quad\rightarrow\quad x+\frac{1}{x}=+3$$

$$3^3=27=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3=x^3+3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}+9\ \rightarrow\ x^3+\frac{1}{x^3}=27-9=18$$

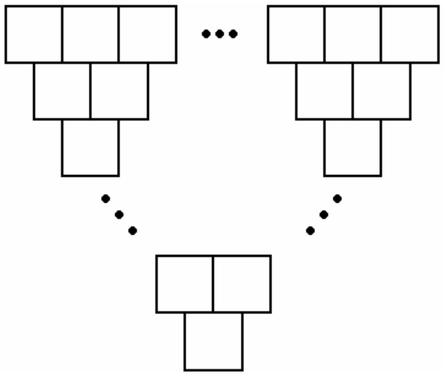
Así: $$18=x^3+\frac{1}{x^3}=\frac{x^6+1}{x^3}\quad\rightarrow\quad x^6+1=18\cdot x^3\quad\rightarrow\quad \underline{k=18}$$

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Miguel García Azcarreta*** *(Col. Nª Señora de las Nieves. Madrid),* ***Francisco J. Babarro Rodríguez*** *(Ourense),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba),* ***Julio J. Zárate Pinto*** *(La Bureba. Briviesca),* ***Ana Lozano Miguel*** *(IES Uno. Requena),* ***Antonio de Gracia García*** *(B2-IES Uno. Requena),* ***Diego Salón Hernández*** *(E3 – IES Uno. Requena),* ***Francisco Burgos Valle*** *(IES Oleana. Requena),* ***Hugo Hernández Climent*** *(IES Oleana. Requena),* ***Henry Díaz Bordón*** *(IES Vecindario. Las Palmas),* ***Sara Morcillo Rodríguez*** *(IES Villa de Stantiago. Santiago de la Espada),* ***María Riscos Gallego*** *(IES Luca de Tena. Sevilla),* ***Javier Ruiz de Larriva*** *(Centro Inglés. Puerto de Santa Mª),* ***Inés Moral Víllora*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Andrea Silvestre Bort*** *(IES Luis Vives. Valencia),* ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Chan do Monte. Marín) y* ***Pablo Freire Fernández*** *(IES As Lagoas. Orense)*

Se recibieron también una solución incompleta y tres incorrectas.

Jn-042. La regla de los signos II.

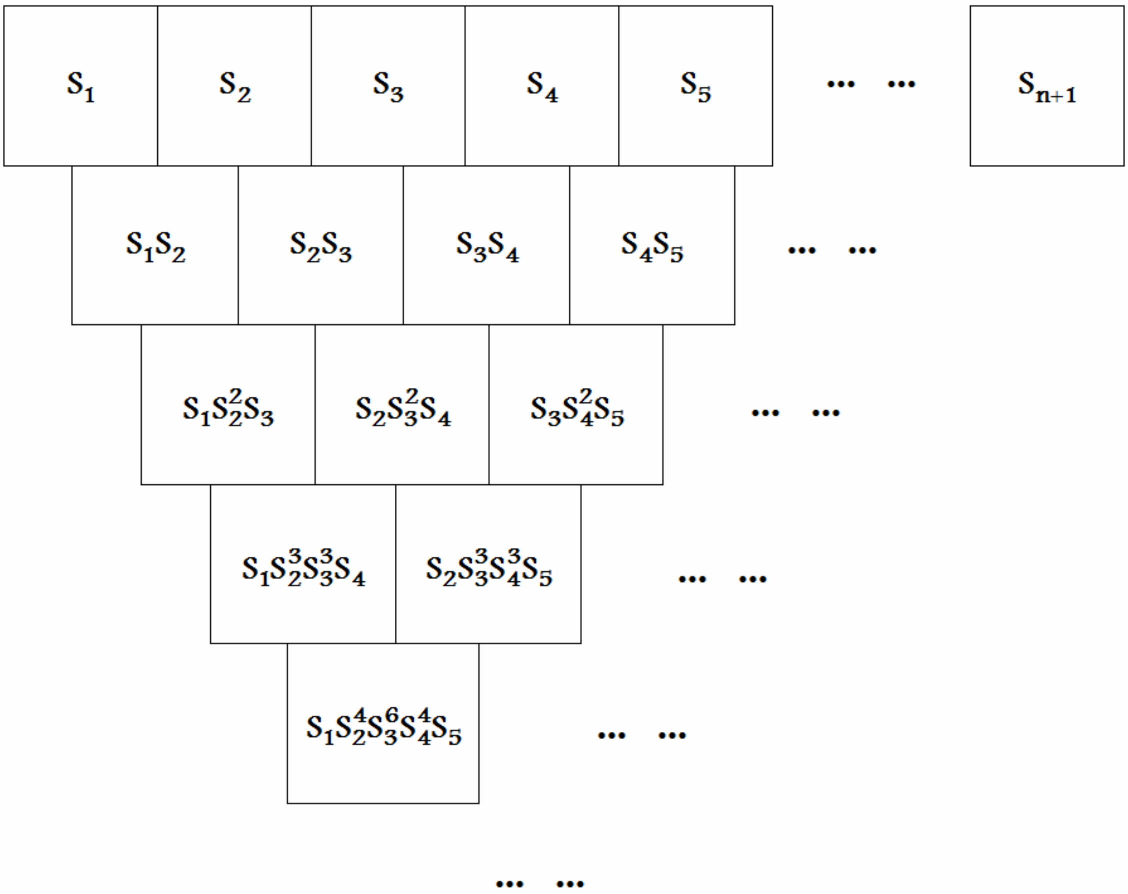
Como en el problema Alevín, vamos a rellenar las celdas cuadradas de la primera fila de este tablero con signos "+" y "–" y, a continuación, en las filas siguientes cuyas celdas van disminuyendo de una en una, bajo cada pareja de signos, iremos escribiendo el resultado de su producto respetando la *regla de los signos*, de manera sucesiva hasta quedarnos con un signo en una sola celda.



¿Cuántas celdas cuadradas debe tener la primera fila para que el resultado final se pueda predecir con exactitud simplemente multiplicando los signos de las celdas que hay en sus dos extremos?

Solución

Pongamos signos genéricos en un tablero con $n+1$ celdas de inicio y, procediendo con sumo cuidado tal y como indica el enunciado, veremos qué pasa:



$$\boxed{S_1^{\binom{n}{0}} S_2^{\binom{n}{1}} S_3^{\binom{n}{2}} \cdots\cdots S_{n+1}^{\binom{n}{n}}}$$

Esta evidente conexión con el Triángulo de Tartaglia, conocido también como de Pascal, permite predecir el signo de la última celda a partir de los signos situados en las celdas iniciales: basta saber la paridad del número combinatorio que afecta al exponente de cada signo del resultado en la celda final.

Y como:

$$(+)^{\binom{n}{k}} = +$$

$$(-)^{\binom{n}{k}} = \begin{cases} + & \text{si } \binom{n}{k} \text{ es par} \\ - & \text{si } \binom{n}{k} \text{ es impar} \end{cases}$$

0:	1
1:	1 1
2:	1 2 1
3:	1 3 3 1
4:	1 4 6 4 1
5:	1 5 10 10 5 1
6:	1 6 15 20 15 6 1
7:	1 7 21 35 35 21 7 1
8:	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9:	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10:	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11:	1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
12:	1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
13:	1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
14:	1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

En nuestro caso, el resultado final se podrá predecir multiplicando simplemente los signos de las celdas iniciales que hay en sus dos extremos, cuando el exponente de los signos intermedios sea par, no afecte. Y esto ocurre en las filas potencias de dos:

con $\underline{n = 2^m}$, cuando el número de celdas de inicio es : $2, 5, 9, 17, \ldots \underline{2^m + 1}$

Nota. Obsérvese, por ejemplo, que si $n=2^m-1$, cuando el número de celdas de inicio es justamente $n=2^m$, basta multiplicar todos los signos de inicio para predecir el final.

*Bien resuelto por: **Francisco Esteve Barceló** (IES Inca. Palma de Mallorca), **Ana Lozano Miguel** (IES Uno. Requena), **Antonio de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Francisco Burgos Valle** (IES Oleana. Requena), **Hugo Hernández Climent** (IES Oleana. Requena), **Henry Díaz Bordón** (IES Vecindario. Las Palmas), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín) y **Pablo Freire Fernández** (IES As Lagoas. Orense)*

Se recibieron también tres soluciones incompletas.

S-042. Un abc más.

Dados tres números reales a, b y c, determinar el máximo valor de c para el que se cumple: $a^2+b^2+c^2=10$ y $a^4+b^4+c^4=66$

Solución

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\vec{u}\cdot\vec{v}\le|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ con $\vec{u}=(a^2,b^2)$ y $\vec{v}=(1,1)$ se tiene: $(a^2,b^2)\cdot(1,1)\le\sqrt{a^4+b^4}\cdot\sqrt{1^2+1^2} \quad\rightarrow\quad a^2+b^2\le\sqrt{2\cdot(a^4+b^4)}$

Elevando al cuadrado: $(a^2+b^2)^2\le 2\cdot(a^4+b^4) \quad\rightarrow\quad (10-c^2)^2\le 2\cdot(66-c^4)$ inecuación doblemente cuadrática con una incógnita que bien podemos abordar:

$$100-20c^2+c^4\le 132-2c^4 \quad\rightarrow\quad 3c^4-20c^2\le 32 \quad\rightarrow\quad c^4-\frac{20}{3}c^2\le\frac{32}{3}$$

$$c^4-\frac{20}{3}c^2+\frac{100}{9}\le\frac{32}{3}+\frac{100}{9} \quad\rightarrow\quad \left(c^2-\frac{10}{3}\right)^2\le\frac{196}{9} \quad\rightarrow$$

$$-\frac{14}{3}\le c^2-\frac{10}{3}\le\frac{14}{3} \quad\rightarrow\quad -\frac{4}{3}\le c^2\le\frac{24}{3}=8$$

Máximo para $c^2=8 \quad\rightarrow\quad c=\pm\sqrt{8}$

Así, la solución pedida es: $c=2\sqrt{2}$

Bien resuelto por: ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***Francisco Javier Fernández Fernández, Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES José Saramago. Arganda del Rey),* ***Sergio Sánchez Zufía*** *(Navarra),* ***José Antonio Rama López*** *(Santiago de Compostela),* ***David Aguirre*** *(UPV/EHU),* ***Unai Foruria*** *(UPV/EHU),* ***Henry Díaz Bordón*** *(IES Vecindario. Las Palmas) y* ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Chan do Monte. Marín)*

Se recibieron también dos soluciones incompletas y cinco incorrectas.