Real Sociedad Matemática Española

PROBLEMA DEL MES

Marzo – 2024

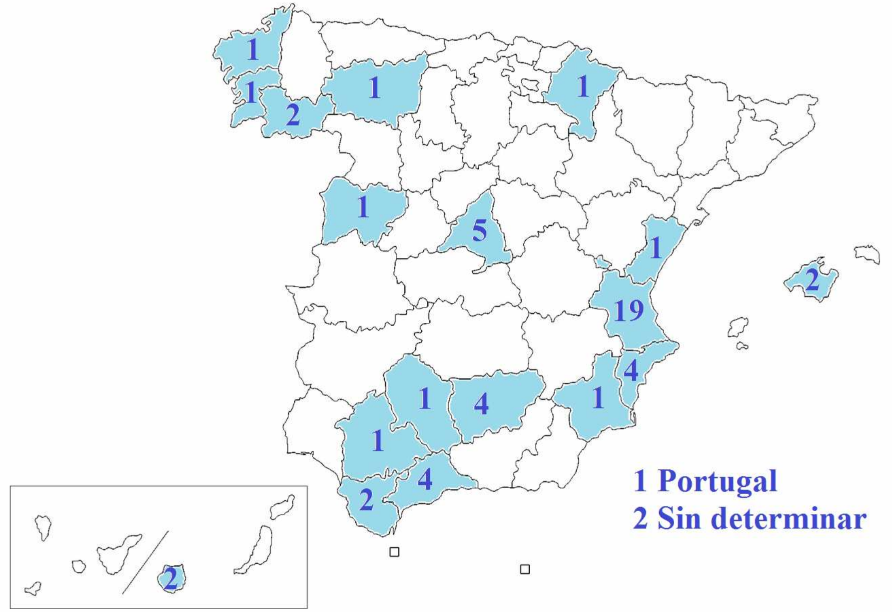
Soluciones

Relación de problemas de los que ya se ha recibido solución correcta

	Alevín	Infantil	Cadete	Juvenil	Júnior	Sénior
041	✓	✓	✓	✓	✓	✓
042	✓	✓	✓	✓	✓	✓
043	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Entendemos que todas aquellas personas que remiten material para esta sección, aceptan ser mencionados en el archivo PM del mes, bien como proponentes de los problemas, bien como resolutores y, además en este caso, si así lo considera el equipo editor, que sus soluciones se expongan como muestra del buen proceder a la hora de abordar dichos problemas. En caso contrario, rogamos que lo indiquen expresamente.

56 participantes (43 chicos / 13 chicas)   105 respuestas

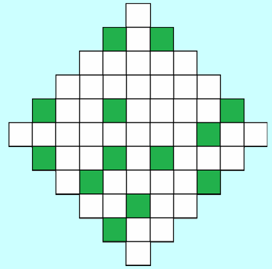


Alevín (5º/6º Primaria)

A-043. Simetría en verde.

Cómo mínimo, ¿cuántos cuadraditos has de ensombrecer en este tablero para que la figura resultante tenga un eje de simetría?

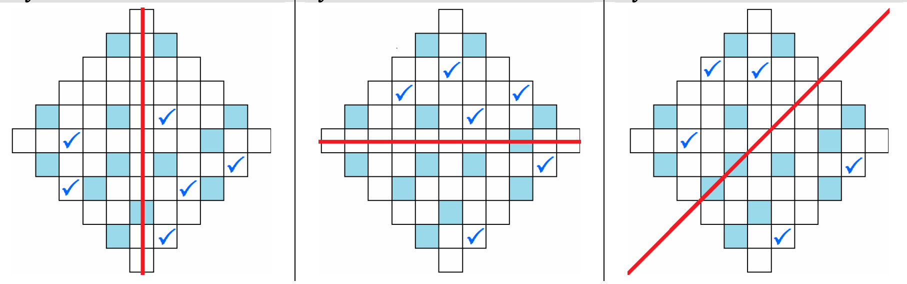
Razona debidamente tu respuesta.



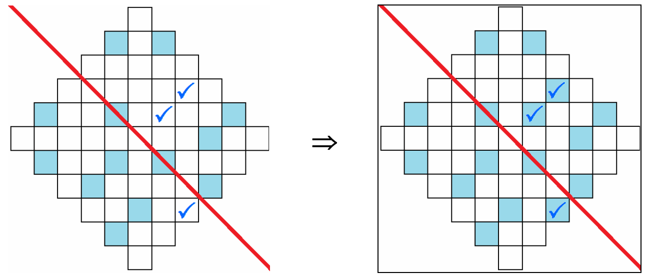
Solución

Este tablero tiene cuatro ejes de simetría. Vamos a ver cuántos cuadraditos hay que sombrear con cada uno de ellos para mantener la simetría coloreada:

Eje vertical: 6 cuadritos	Eje horizontal: 6 cuadritos	Eje inclinado: 5 cuadritos



Eje inclinado: 3 cuadritos   Pues este es el mínimo: <u>3 cuadritos</u>

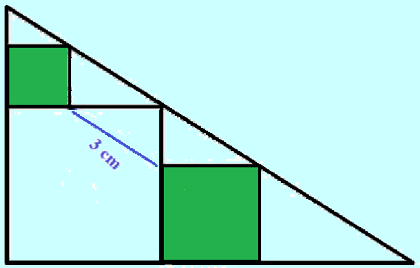


*Bien resuelto por: **Francisco Esteve Barceló** (IES Inca. Palma de Mallorca), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Adrián Burgos Valle** (IES Oleana), **Antonio de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Laura García Robles** (IES Villa de Stgo. Stgo Espada), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Ourense), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **María Riscos Gallego** (IES Luca de Tena. Sevilla) y **Claudia Ortega** (IES Luis Vives. Valencia). Y se recibió también una solución incompleta.*

Infantil (1º/2º ESO)

I-043. Tres cuadrados.

Determina el área de estas dos regiones enverdecidas sabiendo que las figuras inscritas en el triangulo rectángulo son tres cuadrados.

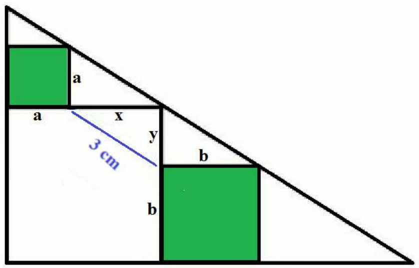


Solución

Ponemos algunas variables y analizamos la figura:

Los cuadrados tienen lados de a y b cm los enverdecidos y $a + x = y + b$ el otro.

Todos los triángulos rectángulos que se aprecian son semejantes, por tanto:



$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b} \quad \rightarrow \quad ab = xy$$

Finalmente, por Pitágoras: $x^2 + y^2 = 3^2 = 9$

Con todo: $x - y = b - a \quad \rightarrow \quad (x-y)^2 = (b-a)^2 \quad \rightarrow$

$$x^2 - 2xy + y^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2 + b^2$$

Luego, el área pedida, en cm² es: $\underline{9 = a^2 + b^2}$

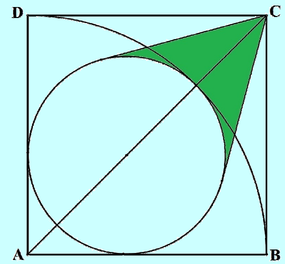
*Bien resuelto por: **Francisco Esteve Barceló** (IES Inca. Palma de Mallorca), **Carlos Calderón Alba** (C. Mas Cmarena. Bétera), **Andreu Sanchís Sánchez** (C. Claret. Játiva), **Víctor de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Francisco Burgos Valle** (IES Oleana), **Hugo Hernández Climent** (IES Oleana. Requena), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **Diego Salón Hernández** (IES Uno. Requena), **Adrián Burgos Valle** (IES Oleana), **Antonio de Gracia García** (IES Uno. Requena), **Graciela Ribero Herrera** (ULL. La Atalaya), **Pablo Freire Fernández** (IES As Lagoas. Orense), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada) y Haydee Osnayo*

Se recibieron también seis soluciones incompletas y cuatro incorrectas.

Cadete (3º/4º ESO)

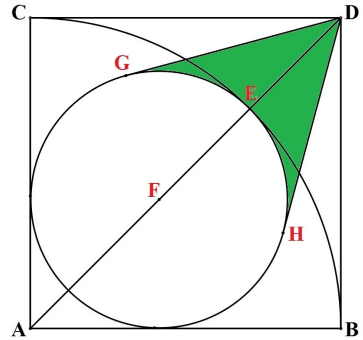
C-043. Área verde.

Calcula el valor del área de la región sombreada, siendo el cuadrado **ABCD** de lado una unidad de longitud.



Solución

Representemos con detalle la situación.



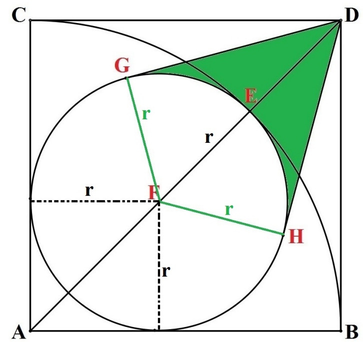
Llamando r al radio de la circunferencia interior de centro F y tangente al sector ABD, tenemos:

$$1 = EF + FA = r + r\sqrt{2} \rightarrow r = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$$

Además, como ABD es una escuadra, un triángulo rectángulo isósceles:

$$\sqrt{2} = AD = AE + ED = 1 + ED \rightarrow$$
$$ED = \sqrt{2} - 1 = r$$

Luego los triángulos rectángulos CGF y CHF son cartabones, esto es, medios triángulos equiláteros con ángulos $30^\circ : 60^\circ : 90^\circ$ y lados, en este caso, de longitudes: $r : r\sqrt{3} : 2r$



Así, el área sombreada S será:

$$S = 2 \cdot \left(\frac{r \cdot r\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot r^2 \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(3\sqrt{3} - \pi\right) \cdot r^2$$

$$\underline{S = \frac{1}{3} \cdot \left(3\sqrt{3} - \pi\right) \cdot \left(3 - 2\sqrt{2}\right) \approx 0{,}1175 \text{ u.d.s.}}$$

*Además de la del proponente, **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), se han recibido soluciones correctas de: **Carlos Calderón Alba** (C. Mas Camarena. Bétera), **Jorge Lafuente Gil** (S. Juan Bosco. Valencia), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **Ana Sánchez Espinosa** (IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada), **Rubén Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **Berta Lorenzo Berenguer** (IES Luis Vives. Valencia), **David Ortí Pascual** (IES Luis Vives. Valencia), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Ourense), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **Malak MK**, **Iván***

López Márquez (C. Inmaculada. Alicante), Luis Adiego Guillot (IES Luis Vives. Valencia), Luis Juan Navarro (IES Luis Vives. Valencia), Andrea Silvestre Bort (IES Luis Vives. Valencia) e Inés Moral Víllora (IES Luis Vives. Valencia)

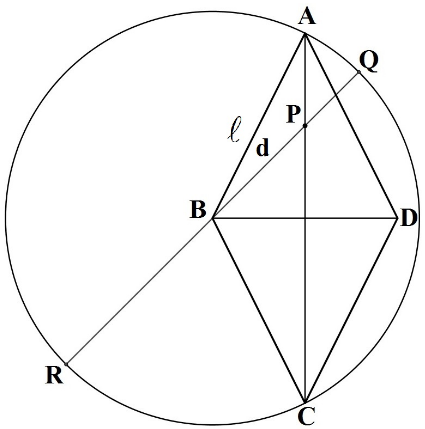
Se recibieron también una solución incompleta y una incorrecta.

Juvenil (1º/2º Bachillerato)

Jv-043. Notable y desconocida proposición.

Demuestra que un punto P cualquiera de la diagonal AC de un rombo ABCD, la divide en dos segmentos donde el producto de sus longitudes es igual a la diferencia del cuadrado del lado del rombo y el cuadrado de su distancia al vértice B.

Solución



Representamos la situación y trazamos la circunferencia de centro B y radio ℓ, el lado del rombo. La prolongación del segmento PB de longitud d corta a la circunferencia en los puntos Q y R.

Se nos pide probar que $AP\cdot PC=\ell^2-d^2$

Por potencia del punto P respecto a la circunferencia tenemos:

$$AP\cdot PC=QP\cdot PR=(\ell-d)(\ell+d)=\ell^2-d^2$$

c.q.d.

*Bien resuelto por: **Francisco Esteve Barceló** (IES Inca. Palma de Mallorca), **Carlos Calderón Alba** (C. Mas Camarena. Bétera), **Jorge Lafuente Gil** (S. Juan Bosco. Valencia), **Alicia Seijas Vázquez** (IES Chan do Monte. Marín), **Miguel García Azcarreta** (Col. Nuestra Señora de las Nieves. Madrid), **Graciela Ribero Herrera** (ULL. La Atalaya), **Pablo Freire Fernández** (IES As Lagoas. Orense), **Juan Manuel Sánchez Hernández** (IESO Las Batuecas. La Alberca), **Carmen Ahibar Chinchilla** (IES Villa de Santiago. Santiago de la Espada), **Rodrigo Martínez**(El Centro Inglés. Puerto de Santa María), **Henry Díaz Bordón** (IES Vecindario. Las Palmas), **Francisco J. Babarro Rodríguez** (Ourense), **Javier Zambrana Aguilar** (Antequera), **Celso de Frutos de Nicolás** (Coslada), **F. Damián Aranda Ballesteros** (IPEP-Córdoba), **Javier Ruiz de Larriva** (Centro Inglés. Puerto de Santa María), **Iván Aldehuela Jaime** (Colegio Nuestra Señora de las Nieves. Madrid), **David Sánchez Cuenca** (IES Serranía. Alozaina), **María Riscos Gallego** (IES Luca de Tena. Sevilla), **Berta Lorenzo Berenguer** (IES Luis Vives. Valencia), **Andrei Gascón** (IES Luis Vives. Valencia), **Luis Juan Navarro** (IES Luis Vives. Valencia), **Inés Moral Víllora** (Luis Vives. Valencia) y **Alejandro Pallarés Valiente** (Col. Nuestra Señora de las Nieves. Madrid)*

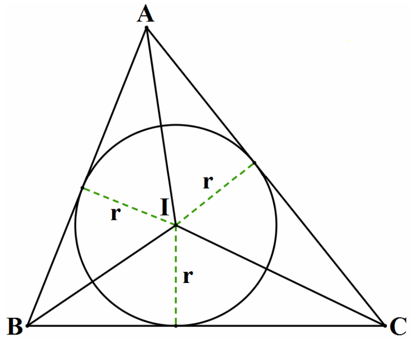
Júnior

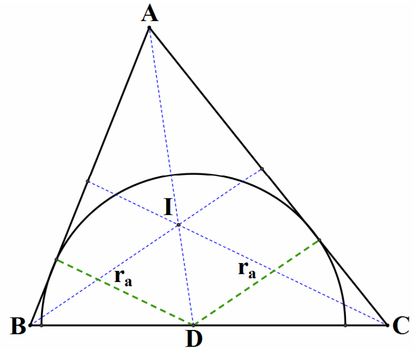
Jn-043. Relación entre radios.

Con la notación habitual, sean I y r el incentro y el radio de la circunferencia inscrita, respectivamente, a un triángulo acutángulo ABC. Y sean r_a, r_b y r_c los radios de tres semicírculos con centros sobre los lados BC, CA y AB y cada uno, a la vez, tangentes a los otros dos lados respectivamente.

Demuestra que: $\dfrac{2}{r}=\dfrac{1}{r_a}+\dfrac{1}{r_b}+\dfrac{1}{r_c}$

Solución





· La figura de la izquierda muestra el punto I, centro de la circunferencia inscrita al triángulo y punto donde confluyen las tres bisectrices, por tanto a igual distancia r de los tres lados. Y se tiene la conocida relación entre áreas:

$$S_{ABC}=S_{ABI}+S_{BCI}+S_{CAI}=\frac{cr}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{br}{2}=\frac{(a+b+c)r}{2}$$

··La figura de la derecha muestra que el centro del semicírculo pedido es D, el punto de intersección del lado BC y la bisectriz del ángulo A y que, por tanto, se encuentra a igual distancia r_a de los otros dos lados. Y, ahora, la relación entre áreas que se tiene es:

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{ADC}=\frac{cr_a}{2}+\frac{br_a}{2}=\frac{(c+b)r_a}{2}$$

Análogamente se podrían haber representado los correspondientes semicírculos sobre los otros dos lados y hubiéramos tenido:

$$S_{ABC}=\frac{(b+a)r_c}{2}\quad \text{y}\quad S_{ABC}=\frac{(a+c)r_b}{2}$$

·Con todo: $2S_{ABC}=(a+b+c)r=(c+b)r_a=(b+a)r_c=(a+c)r_b$

$$\frac{(a+b+c)r}{r_a}=c+b\qquad \frac{(a+b+c)r}{r_b}=a+c\qquad \frac{(a+b+c)r}{r_c}=b+a$$

sumando: $$(a+b+c)r\left(\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}\right)=2(a+b+c)$$

y simplificando: $\underline{\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{2}{r}}$ c.q.d.

Bien resuelto por: ***Dan Manuel Vancea*** *(IES Villarroja. Almazora),* ***Artur Ostrovskiy*** *(C Newton College. Elche),* ***José Antonio Rama López*** *(Santiago de Compostela),* ***Pablo Freire Fernández*** *(IES As Lagoas. Orense),* ***Henry Díaz Bordón*** *(IES Vecindario. Las Palmas),* ***Javier Zambrana Aguilar*** *(Antequera) y* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba)*

Se recibió también una solución incompleta.

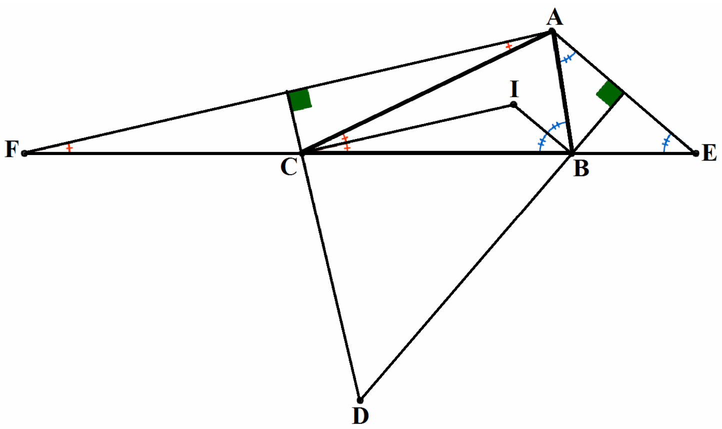
Sénior

S-043. Juego con ⊥ y ||.

En el triángulo ABC, las bisectrices se cortan en I, el incentro. Se construye el punto D de forma que $DB \perp BI$ y $DC \perp CI$. Sean E y F los puntos de la recta BC tales que AE||BI y AF||CI. Demuestra que $DE = DF$.

Solución

Adviértase que el punto D es uno de los tres excentros del triángulo ABC, intersección de la bisectriz interior del ángulo A y de las bisectrices exteriores de los ángulos B y C. En el gráfico, A, I y D están alineados, aunque en este problema no sea preciso utilizar este hecho.



Propagando igualdades de ángulos entre rectas paralelas es fácil constatar que los triángulos ABD y ACF son isósceles:

$$\angle BAE = \angle ABI = \angle CBI = \angle BEA \quad \text{y} \quad \angle CAF = \angle ACI = \angle BCI = \angle CFA$$

Finalmente, observando en el triángulo ABE que la recta BD es un eje de simetría, se tiene que $DE = DA$ y, análogamente, observando en el triángulo ACF que la recta CD es un eje de simetría, se tiene que $DA = DF$. Con lo que se concluye lo pedido, que $\underline{DE = DF}$ (de hecho, D es el circuncentro del triángulo AEF).

Bien resuelto por: ***Francisco Esteve Barceló*** *(IES Inca. Palma de Mallorca),* ***Dan Manuel Vancea*** *(IES Villarroja. Almazora),* ***Artur Ostrovskiy*** *(C Newton College. Elche),* ***Carlos Villagordo Espinosa*** *(King College. Alicante),* ***Alicia Seijas Vázquez*** *(IES Chan do Monte. Marín),* ***José Antonio Rama López*** *(Santiago de Compostela),* ***Miguel Ángel Ingelmo Benito*** *(IES José Saramago. Arganda del Rey),* ***Sergio Sánchez Zufía*** *(Navarra),* ***Antonio de Gracia García*** *(IES Uno. Requena),* ***Sebastià Roig*** *(Mallorca),* ***Pablo Freire Fernández*** *(IES As Lagoas. Orense),* ***Antonio Roberto Martínez Fernández*** *(CEA Mar Menor. Torre Pacheco),* ***F. Damián Aranda Ballesteros*** *(IPEP-Córdoba) y* ***Tim Bao*** *(Kings College. Alicante)*

Se recibieron también una solución incompleta y tres incorrectas. (Algún resolutor no detectó la errata, claramente intuible del enunciado e, incluso probó lo imposible con ayuda de Chat gpt !!)